УДК 519.246.2, 517.977.58

Д.А.ЛЕДНОВ

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕНАБЛЮДАЕМОГО (СКРЫТОГО) СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В настоящей работе поставлена задача управления ненаблюдаемым (скрытым) случайным процессом авторегрессии на основе критерия минимальной дисперсии значения динамических отношений между наблюдаемыми процессами авторегрессии, на поведение которых влияет скрытый процесс. Проведено вычисление последовательности значений управляющего параметра для частного случая поставленной задачи. Рассмотрено приближение, которое позволяет сократить сложность вычислений управляющего параметра.
Ключевые слова: *модель наблюдений, процесс авторегрессии, управление.*

Ведение и постановка задачи. В области стохастической фильтрации широко известна классическая модель наблюдений Калмана [1,2] с дискретным временем (здесь использованы обозначения, введенные в работе [2]):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= A(t)\mathbf{y}_{t-1} + B(t)\boldsymbol{\varepsilon}_t,\ \mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\gamma}; \\ \mathbf{z}_t &= C(t)\mathbf{y}_t + D(t)\mathbf{w}_t,\ t = 1,..,N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{y}_t \in R^g$ - векторный случайный процесс, недоступный для непосредственного наблюдения; $\mathbf{z}_t \in R^q$ - наблюдаемый векторный случайный процесс в момент времени *t=1,..,T* ; $\boldsymbol{\gamma} \in R^g$ -случайный вектор начальных условий с известной ковариацией $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}) = S_\gamma$; $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ и $\mathbf{w}_t$-стационарные в широком смысле векторные белые шумы с известными ковариациями $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t) = S_\varepsilon$ и $\mathrm{cov}(\mathbf{w}_t,\mathbf{w}_t) = S_w$.

Предполагается, что величины $\boldsymbol{\gamma},\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\},\{\mathbf{w}_t\}$ независимы в совокупности и матрицы $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$ являются неслучайными и известными.

Задача, которую необходимо решить в соответствии со схемой измерений (1), состоит в оценке процесса $\mathbf{x}_t = \Phi_t\mathbf{y}_t$, $t = 1,..,N$ по совокупности наблюдений $\{\mathbf{z}_t\}$, где $\{\Phi_t\}$ - произвольная последовательность заданных неслучайных матриц.

В ходе исследования задач обработки речи, в частности идентификация диктора и распознавание слов, была выявлена модель измерений, сходная с моделью Калмана, которую в рамках введения запишем в общей векторной форме, а в дальнейшем будем рассматривать ее частный ска-

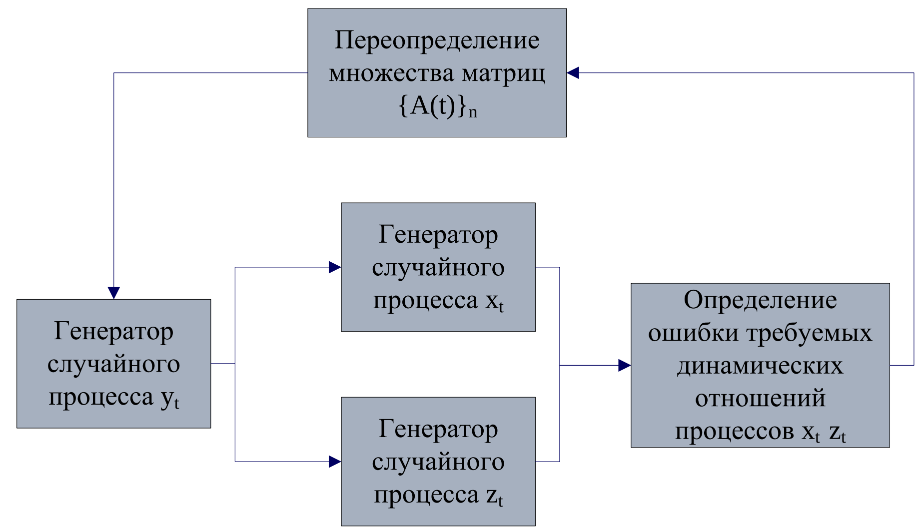
лярный вид, так как он более важен для решения практических задач. Запишем эту модель измерений в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_t = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \text{ при } t > \mathrm{n},\\
&\{\mathbf{y}_j = \boldsymbol{\gamma}_j\},\ j = 1,..,n;\\
&\mathbf{z}_t = \sum_{i=1}^{v} B_i\mathbf{z}_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} C_j\mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{w}_t,\ \text{при } \mathrm{t} > v,\ \mathrm{k} < \mathrm{n},\\
&\{\mathbf{z}_j = \lambda_j\},\ j = 1,..,v;\\
&\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^{h} D_i\mathbf{x}_{t-i} + \sum_{j=1}^{s} F_j\mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{q}_t\ \text{ при } \mathrm{t} > \mathrm{h},\ \mathrm{s} < \mathrm{n},\\
&\{\mathbf{x}_j = \psi_j\},\ j = 1,..,h;
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где по-прежнему $\mathbf{y}_t \in R^g$ - векторный случайный процесс, недоступный для непосредственного наблюдения; $\mathbf{z}_t \in R^q$ и $\mathbf{x}_t \in R^q$ - наблюдаемые векторные случайные процессы в момент времени *t=1,..,T;* $\{\boldsymbol{\gamma}_j \in R^g\},\ j = 1,..,n;$ $\{\lambda_j \in R^q\},\ j = 1,..,v;$ $\{\psi_j \in R^q\},\ j = 1,..,v;$ - совокупность случайных векторов начальных условий с известными ковариациями: $\{\mathrm{cov}(\boldsymbol{\gamma}_j,\boldsymbol{\gamma}_j) = S_\gamma(j)\},\ j = 1,..,n$; $\{\mathrm{cov}(\lambda_j,\lambda_j) = S_\lambda(j)\},\ j = 1,..,v;$ $\{\mathrm{cov}(\psi_j,\psi_j) = S_\psi(j)\},\ j = 1,..,h;$ $\left\{\{B\}_v,\{C\}_k,\{D\}_h,\{F\}_s\right\}$ - известные, не зависящие от времени неслучайные матрицы; $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, $\mathbf{w}_t$ и $\mathbf{q}_t$-стационарные в широком смысле векторные белые шумы с известными ковариациями: $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t) = S_\varepsilon$, $\mathrm{cov}(\mathbf{w}_t,\mathbf{w}_t) = S_w$ и $\mathrm{cov}(\mathbf{q}_t,\mathbf{q}_t) = S_q$.

Относительно динамической системы, которая реализует схему наблюдений (2), множество матриц $\{A(t)\}_n$ является неизвестным и с их помощью она управляет наблюдаемыми процессами. В качестве цели управления системы выберем сохранение некоторых динамических отношений между наблюдаемыми процессами $\rho(\mathbf{x}_t,\mathbf{z}_t) - \boldsymbol{\theta}_t = 0$, где векторная функция $\rho(.)$ и поведение вектора $\boldsymbol{\theta}_t$ заданы.

Такую динамическую систему можно представить в виде функциональной схемы, представленной на рисунке.



Функциональная схема динамической системы (2)

Поскольку вектор $\rho(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) - \boldsymbol{\theta}_t$ в каждый момент времени является случайной величиной, то поиск неизвестного множества матриц $\{A(t)\}_n$ можно проводить исходя их условия минимума математического ожидания среднеквадратического отклонения

$$M\{(\rho(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) - \boldsymbol{\theta}_t)^2\} \to \min. \qquad (3)$$

Термин оптимальное регулирование в названии статьи употреблен именно в решении функционала (3) относительно неизвестных матриц $\{A(t)\}_n$.

Решение частного случая

Рассмотрим частный случай задачи (2), (3)

$$y_t = a_{t-1}y_{t-1} + \varepsilon_t,\ при\ a_0 = 0,\ t > 0;$$

$$x_t = dx_{t-1} + \sum_{j=0}^{g} f_j y_{t-j} + w_t,\ при\ \ x_0 = \psi,\ y_{-j} = 0,\ \ j > 1; \qquad (4)$$

$$z_t = bz_{t-1} + \sum_{j=0}^{s} c_j y_{t-j} + q_t,\ при\ \ z_0 = \lambda,\ z_{-j} = 0,\ \ j > 1,$$

где требуется найти неизвестные коэффициенты a_t при условии, что функция $\rho(.)$ является линейной и необходимо минимизировать функционал

$$M\{(\varphi x_t + z_t - \theta_t)^2\} \to \min, \qquad (5)$$

здесь параметр φ - постоянное заданное число, θ_t -некоторая заданная, дискретная, детерминированная функция.

Скрытый процесс y_t в (3) можно выразить посредством отсчетов случайного процесса ε_t :

$$y_t = \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-1} a_k + \varepsilon_t = a_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{t-2} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-2} a_k + \varepsilon_{t-1} \right) + \varepsilon_t \,. \tag{6}$$

В формуле (6) выделен последний коэффициент a_{t-1}, поскольку это понадобится для дальнейших вычислений.

Подстановка (6) в представление наблюдаемых процессов x_t и z_t в (4) приводит к возможности выразить эти процессы посредством отсчетов случайных процессов (ε_t, w_t) и (ε_t, q_t) соответственно. Запишем результат вычислений только для процесса x_t, поскольку для процесса z_t формулы имеют тот же вид:

$$\begin{gathered}
x_t = dx_{t-1} + \sum_{j=0}^{g} f_j y_{t-j} + w_t = \\
dx_{t-1} + \sum_{j=0}^{g} f_j \left(a_{t-j-1} \left(\sum_{i=1}^{t-j-2} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-j-2} a_k + \varepsilon_{t-j-1} \right) + \varepsilon_{t-j} \right) + w_t = \\
d^t \psi + \sum_{i=0}^{t-1} d^i \left(\sum_{j=0}^{g} f_j \left(a_{t-i-j-1} \left(\sum_{i=1}^{t-i-j-2} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-i-j-2} a_k + \varepsilon_{t-i-j-1} \right) + \varepsilon_{t-i-j} \right) + w_{t-i} \right) = \\
f_1 a_{t-1} \left(\sum_{i=1}^{t-2} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-2} a_k + \varepsilon_{t-2} \right) + \phi_t,
\end{gathered} \tag{7}$$

где, как и в (6), был выделен множитель, содержащий коэффициент a_{t-2} с максимальным временным индексом, и введено обозначение

$$\begin{gathered}
\phi_t = \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=1}^{g} f_j a_{t-i-j-1} \left(\sum_{i=1}^{t-i-j-2} \varepsilon_i \prod_{k=i}^{t-i-j-2} a_k + \varepsilon_{t-i-j-1} \right) + \\
+ d^t \psi + \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \varepsilon_{t-i-j} + \sum_{i=0}^{t-1} d^i w_{t-i}.
\end{gathered}$$

Для вычисления математического ожидания (5) и последующего вычисления минимума функционала на основе явных выражений для процессов x_t и z_t найдем математические ожидания вида $M\{x_t^2\}$, $M\{x_t\}$, $M\{z_t^2\}$, $M\{z_t\}$, $M\{x_t z_t\}$.

Опустим громоздкие вычисления запишем окончательный результат:

$$M\{x_t\} = m_\varepsilon f_1 a_{t-1}\left(\sum_{k=1}^{t-2}\prod_{n=k}^{t-2} a_n + 1\right) + \Phi_t , \tag{8}$$

$$M\{x_t^2\} = 2S_\varepsilon f_1 \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \prod_{n=t-i-j}^{t-1} a_n + S_\varepsilon f_1^2 \sum_{k=1}^{t-2}\prod_{n=k}^{t-2} a_n^2 +$$

$$+ 2S_\varepsilon f_1 \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \sum_{k=1}^{t-i-j-1}\prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-1} a_v + \tag{9}$$

$$+ 2S_\varepsilon f_1 \sum_{j=1}^{g} f_j \sum_{k=1}^{t-j-1}\prod_{n=k}^{t-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-1} a_v + \Psi_t ,$$

$$M\{x_t z_t\} = S_\varepsilon c_1 \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \prod_{n=t-i-j}^{t-2} a_n + S_\varepsilon f_1 \sum_{i=0}^{t-1} b^i \sum_{j=0}^{s} c_j \prod_{n=t-i-j}^{t-1} a_n +$$

$$+ S_\varepsilon c_1 \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \sum_{k=1}^{t-i-j-1}\prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-1} a_v + S_\varepsilon f_1 c_1 \sum_{k=1}^{t-1}\prod_{n=k}^{t-1} a_n^2 +$$

$$+ S_\varepsilon f_1 \sum_{i=1}^{t-1} b^i \sum_{j=1}^{s} c_j \sum_{k=1}^{t-i-j-1}\prod_{n=k}^{t-1} a_n \prod_{v=k}^{t-i-j-1} a_v +$$

$$+ S_\varepsilon f_1 \sum_{j=1}^{s} c_j \sum_{k=1}^{t-j-1}\prod_{n=k}^{t-1} a_n \prod_{v=k}^{t-j-1} a_v + \tag{10}$$

$$+ S_\varepsilon c_1 \sum_{j=1}^{g} f_j \sum_{k=1}^{\Delta}\prod_{n=k}^{t-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-1} a_v + \Omega_t ,$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi_t = m_\psi d^t + \frac{1-d^t}{1-d}(m_\varepsilon F + m_w) +$$

$$m_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=1}^{g} f_j \sum_{k=1}^{t-i-j-1}\prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n + \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j \sum_{k=1}^{t-i-j-1}\prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n\right);$$

$$\Psi_t = d^{2t} S_\psi + S_w \frac{1-d^{2t}}{1-d^2} +$$

$$+2S_\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{u=1,\,j=0}^{g,g} f_j f_u \prod_{n=t-i-j}^{t-u-1} a_n + \sum_{p=1,i=0}^{t-1} d^{i+p} \sum_{u,\,j=0}^{g,g} f_j f_u \prod_{n=t-i-j}^{t-p-u-1} a_n \right) +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{i,\,j=0}^{t-1} d^i d^j \sum_{r=0}^{g} f_j f_{i+j-r} + S_\varepsilon \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{u=1,\,j=0}^{g,g} f_j f_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-u-1} a_v +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{u,\,j=1}^{g,g} f_j f_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-u-1} a_v +$$

$$+2S_\varepsilon \sum_{p=1,i=1}^{t-1} d^{i+p} \sum_{u,\,j=0}^{g,g} f_j f_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-p-u-1} a_v;$$

$$\Omega_t = S_\varepsilon \sum_{p,i=0}^{t-1} d^i b^p \sum_{j,u=0}^{g,s} f_j c_{i+j-p} + S_\varepsilon \sum_{p=1,i=0}^{t-1} d^i b^p \sum_{j,u=0}^{g,s} f_j c_u \prod_{n=t-i-j}^{t-p-u-1} a_n +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=0,u=1}^{g,s} f_j c_u \prod_{n=t-i-j}^{t-u-1} a_n + S_\varepsilon \sum_{p=0,i=1}^{t-1} d^i b^p \sum_{j,u=0}^{g,s} f_j c_u \prod_{n=t-p-u}^{t-i-j-1} a_n +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{p=0}^{t-1} b^p \sum_{j=1,u=0}^{g,s} f_j c_u \prod_{n=t-p-u}^{t-j-1} a_n +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{p=1,i=1}^{t-1} d^i b^p \sum_{j,u=0}^{g,s} f_j c_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-p-u-1} a_v +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=1,u=0}^{g,s} f_j c_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-i-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-u-1} a_v +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{p=1}^{t-1} b^p \sum_{j=1,u=0}^{g,s} f_j c_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-p-u-1} a_v +$$

$$+S_\varepsilon \sum_{j=1,u=1}^{g,s} f_j c_u \sum_{k=1}^{\Delta} \prod_{n=k}^{t-j-1} a_n \prod_{v=k}^{t-u-1} a_v;$$

$$\Delta = \min(t - i - j - 1, t - p - u - 1);$$

$$F = \sum_{j=0}^{g} f_j .$$

Для математических ожиданий $M\{z_t\}$, $M\{z_t^2\}$ выражения аналогичны (8) и (9) соответственно.

Подстановка формул (8)-(10) в (5) и вычисление производной приводит к уравнению относительного коэффициента a_{t-1}:

$$a_{t-1}\left(\sum_{k=0}^{t-2}\prod_{n=k}^{t-2} a_n^2 + 1\right)(\varphi f_0 + c_0) = \frac{\theta_t m_\varepsilon}{S_\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{t-2}\prod_{n=k}^{t-2} a_n + 1\right) - \sum_{j=1}^{s} c_j W_{t-j-1} -$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} b^i \sum_{j=0}^{s} c_j W_{t-i-j-1} - \quad (11)$$

$$-\varphi\left(\sum_{j=1}^{g} f_j W_{t-j-1} + \sum_{i=1}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j W_{t-i-j-1} + \sum_{i=0}^{t-1} d^i \sum_{j=0}^{g} f_j U_{t-i-j}\right) -$$

$$-\sum_{i=0}^{t-1} b^i \sum_{j=0}^{s} c_j U_{t-i-j} - \frac{\theta_t^2}{S_\varepsilon(\varphi f_0 + c_0)},$$

где введены обозначения:

$$W_r = \sum_{k=0}^{r}\prod_{n=k}^{r} a_n \prod_{v=k}^{t-2} a_v \, , \; U_r = \prod_{n=r}^{t-2} a_n + 1.$$

Учитывая рекуррентные соотношения:

$$U_{t-2} = a_{t-2} + 1, \; U_r = a_r(U_{r+1} - 1),$$

$$W_0 = 0, \; W_{r+1} = a_{r+1}(W_r + U_{r+1}),$$

проведем вычисление нескольких первых двух коэффициентов a_t при условии, что математическое ожидание m_ε равно нулю:

$$a_1 = -\frac{\theta_t^2}{S_\varepsilon(\varphi f_0 + c_0)^2},$$

$$a_2(a_1^2 + 1)(\varphi f_0 + c_0) = -a_1^2(c_1 + bc_0 + \varphi(f_1 + df_0)) -$$

$$-a_1(c_2 + bc_1 + b^2 c_0 + \varphi(f_2 + df_1 - d^2 f_0)) - \frac{\theta_t^2}{S_\varepsilon(\varphi f_0 + c_0)}. \quad (12)$$

Если предположить, что выполняется неравенство $\dfrac{\theta_t^2}{S_\varepsilon(\varphi f_0 + c_0)^2} < 1$ и для всех коэффициентов авторегрессии (4) справедливо: $|d| < 1$; $|b| < 1$; $|f_i| < 1$ для $i = 0,..,g$; $|c_i| < 1$ для $i = 0,..,s$, то на основании (12) можно утверждать, что $|a_t| < 1,\ \forall t > 0$.

Последнее неравенство позволяет упростить выражение (11), пренебрегая множественными произведениями чисел со значением меньше единицы. Если рассмотреть в (11) члены не выше первого порядка малости:

$$a_{t-1}(\varphi f_0 + c_0) = (a_{t-2} + 1)\left(\frac{\theta_t m_\varepsilon}{S_\varepsilon} - \sum_{i=0}^{2} c_i b^{2-i} - \varphi \sum_{i=0}^{2} f_i d^{2-i}\right) - \\ - \frac{\theta_t^2}{S_\varepsilon(\varphi f_0 + c_0)},$$

то найдем, что для определения дискретной управляющей последовательности $\{a_t\}$ достаточны коэффициенты авторегрессии со значением индекса не более двух.

Использование последней формулы позволяет сократить вычислительную сложность нахождения функции управления источника речевого сигнала при решении задачи идентификации диктора, которая была описана в работе [3].

Выводы. Выполненная работа позволяет строить модель скрытого случайного процесса авторегрессии на основе принципа минимизации матожидания среднеквадратического отклонения отношения между наблюдаемыми процессами. Это имеет большое практическое значение при решении задачи идентификации дикторов и позволяет рассматривать функцию голосового источника, скрытого от непосредственного наблюдения.

Библиографический список

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems// Transaction of the ASME-Jornal of Basic Engineering. – 1960. 82 (Series D): 35-45.

2. Панков А.Р., Миллер Г.Б. Минимаксная линейная рекуррентная фильтрация неопределенно-стохастических последовательностей по интегральному критерию// Информационные процессы. – 2001. – Т.1. - №2. – С.150-166

3. Agranovsky A.V. Lednov D.A. A model of controlled hidden linear autoregression processes for speakers identification// International Workshop "SPEECH AND COMPUTER" (SPECOM). – 2005. – V2. – P.571-573.

Материал поступил в редакцию 12.01.06.

D. LEDNOV

MODEL OF OPTIMAL REGULATION OF NON-OBSERVABLE (HIDDEN) RANDOM PROCESS

In the present paper the problem of non-observable (hidden) random autoregression process control based on the criteria of minimal dispersion of dynamical ratio value between an observable autoregression processes with hidden random process-dependent behavior is researched.

A sequence of controlled parameters is calculated for the specific case of problem. An approach reducing the calculation complexity of control parameter is found.

ЛЕДНОВ Дмитрий Анатольевич (р.1965), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, зав. лабораторией анализа и обработки речи ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика», г.Ростов-на-Дону. Окончил Казахский госуниверситет (1991).
Научные интересы: теория случайных процессов и обработка речи.
Имеет 72 научные публикации.